DZIAŁ NAUKOWY

MATEMATYKA STOSOWANA 9, 2008

Karina Piwarska (Warszawa)
Kamil Kulesza (Warszawa, Cambridge)

Zakład o przelot, czyli matematyka finansowa i bilety tanich linii lotniczych

Streszczenie. Rynki instrumentów pochodnych należą obecnie do jednych z najciekawszych obszarów badań w matematyce finansowej. Są też obszarem, gdzie spotykają się teoria i praktyka, tak ważne w rzetelnie uprawianej matematyce stosowanej. Zachodzi tam ożywiona wymiana idei pomiędzy matematykami a ekonomistami, choć de facto ma ona charakter bardziej interdyscyplinarny, angażując np. informatyków i fizyków. Równolegle dynamiczny rozwój rynków i pojawianie się coraz szerszej gamy instrumentów pochodnych pozwalają na włączanie do tego zbioru coraz to nowych obiektów.
W naszej pracy pokazujemy, że skoro zakładać się można „o wszystko", a instrumenty pochodne są rodzajem giełdowego zakładu, to bilety tanich linii lotniczych można opisać jako specyficzne opcje. Uwzględniając rzeczywiste warunki rynkowe i ograniczenia narzucone w regulaminach tanich przewoźników, przedstawimy alternatywny dla już istniejących sposób podejścia do wyceny takich instrumentów oraz metody konstrukcji i optymalizacji portfela złożonego z biletów, który może mieć zastosowanie zarówno do celów spekulacyjnych, jak i korporacyjnych.
Słowa kluczowe: matematyka finansowa, rynek instrumentów pochodnych, analiza systemowa, tanie linie lotnicze

Wstęp. *„Gra wygląda tak: grupa ludzi, najmniej dwie, a najwięcej dziesięć, siada w koło. Każdy gracz przyciska do piersi banknot dolarowy. (...) Każdy gracz stara się oszukać innych co do seryjnego numeru banknotu trzymanego w ręku. Jeden gracz zaczyna rozgrywkę, mówiąc na przykład „trzy szóstki". Znaczy to, że seryjne numery wszystkich trzymanych przez graczy banknotów, włącznie z jego banknotem, zawierają co najmniej trzy szóstki. ... Następny gracz (...) ma do wyboru dwie możliwości. Może zalicytować wyżej (trzy siódemki, ósemki, dziewiątki) lub większą liczbę jakichkolwiek cyfr [...]. Może też „wyzwać" – powiedzieć coś w rodzaju „sprawdzam". Licytacje odbywa się do chwili, gdy wszyscy gracze zgodzą się sprawdzać odzywkę jednego z nich."* – „Poker kłamców. ..." Michael Lewis [1].

Powyższy fragment opisuje grę – „pokera kłamców" – w którą grywali między sobą traderzy([1]) w banku inwestycyjnym Salomon Brothers, jednym z dużych i dobrze prosperujących banków inwestycyjnych działających w drugiej połowie XX wieku na Wall Street. Jak dodaje niedługo po tym fragmencie autor: "*Dla dobrego gracza matematyczna strona rozgrywki nie przedstawia trudności*" (zwłaszcza, że „*Większość z nich była doktorami matematyki, ekonomii lub fizyki*"), jednak to właśnie element ludzki – możliwość blefu – nadawał grze naprawdę interesujący i skomplikowany wymiar. Michael Lewis pisze dodatkowo: „*Gra zawiera w sobie pewien element gry na giełdzie (...) Pytania, jakie zadaje sobie grający w „pokera kłamców", są takie same, jak te, które zadaje sobie trader. Czy warto podjąć ryzyko? Czy mam szanse? Na ile przebiegły jest mój przeciwnik? Czy wie co robi, a jeśli nie, jak wykorzystać jego niewiedzę? (...) Każdy gracz szuka słabych punktów, przewidywalnych elementów i schematów w odzywkach innych graczy, jednocześnie starając się nie ujawniać swoich"* [1]. Owa gra stanowiła dobry przykład na to jak mając żyłkę tradera, zakładać można się dosłownie „o wszystko".

Na rynkach finansowych takim odpowiednikiem zakładów są instrumenty pochodne (inaczej zwane derywatami), ich cena uzależniona jest od ceny innego instrumentu, zwanego bazowym lub podstawowym. Natomiast wypłata, jaką otrzymuje posiadacz takiego typu kontraktu, zależy ściśle od ceny instrumentu bazowego oraz warunków ustalonych w momencie zawierania umowy. Jednym z takich warunków jest cena wykonania, która mówi po jakiej cenie chcemy kupić lub sprzedać instrument bazowy w określonym momencie czasu w przyszłości. Tę cenę możemy potraktować intuicyjnie jako przedmiot zakładu. Tego typu kontrakty służą, przynajmniej w teorii, do zabezpieczenia inwestora przed niekorzystnymi dla niego efektami wahań cen instrumentów bazowych. Do tych ostatnich należą towary, akcje, kursy walut, wartość stopy procentowej, indeksy giełdowe bądź inne specjalistyczne indeksy. Jak widać, instrumenty pochodne związane są w większości ze zjawiskami i obiektami finansowymi, ewentualnie ekonomicznymi, okazuje się jednak, że na tym lista potencjalnych instrumentów bazowych się nie kończy – kolejne derywaty powstawały np. z wykorzystaniem wiedzy o pogodzie i katastrofach naturalnych. Na instrumenty te można patrzeć jako na sposób transferu ryzyka ubezpieczeniowego na rynek kapitałowy.

Ważnym impulsem do powstawania instrumentów pochodnych na katastrofy był huragan Andrew w USA w 1992 roku. Wtedy to, w wyniku dużych strat spowodowanych przez huragan, wzrósł popyt na ubezpieczenia, których ceny zaczęły rosnąć. W efekcie inwestorzy mogli po raz pierwszy przyjmować

([1]) Mianem tym w amerykańskich i brytyjskich bankach inwestycyjnych określa się pracowników odpowiedzialnych za wykonywanie transakcji. Najbliższym polskim odpowiednikiem tradera jest makler.

ryzyko związane z konkretnym wydarzeniem w formie inwestycji w papiery wartościowe towarzystwa ubezpieczeniowego [2].

Pomysł kolejnych „niefinansowych” instrumentów pochodnych można by podsumować słowami Benjamina Franklina: „*Nic na tym świecie nie jest pewne... oprócz śmierci i podatków*”. Nowe derywaty mają pomóc oszacować ryzyko związane z „ryzykiem długowieczności” (dotyczy to liczby zgonów i stopy śmierci). W 2006 roku po raz pierwszy sprzedano inwestorom „obligacje umieralności” (określają one ryzyko związane z gwałtownym wzrostem stopy zgonów) o wartości niemal 1 miliarda euro. A kolejnym – dość naturalnym – klientem wydają się być towarzystwa emerytalne [3].

W naszym artykule, pokażemy, że bilet taniej linii lotniczej można potraktować jak instrument pochodny – a dokładnie opcję. Przedstawimy także alternatywny do powszechnie stosowanych model wyceny instrumentów tego typu. Plan artykułu jest następujący: kolejno przypomnimy definicje i kilka faktów dotyczących instrumentów pochodnych, w szczególności opcji, następnie wytłumaczymy, dlaczego bilety tanich linii lotniczych można potraktować jako kontrakty opcyjnie, a ostatni fragment tekstu poświęcimy opisowi modelu matematycznego badanego instrumentu i rozważaniu na temat konstrukcji i optymalizacji portfela biletów tanich linii. W Dodatku A Czytelnik będzie mógł znaleźć podsumowanie informacji na temat działania tanich linii lotniczych.

1. Opcje i inne instrumenty pochodne. Na początek podamy podstawowe informacje na temat instrumentów pochodnych i opcji, wykorzystując terminologię i notację z prac Rutkowskiego [4] oraz Werona [5].

1.1. *Instrumenty pochodne.* **Instrument pochodny** (inaczej derywat) jest umową zobowiązującą obie strony do zawarcia transakcji na wcześniej określonych warunkach. Nabywca (zajmujący tzw. pozycję długą) zobowiązuje się zapłacić ustaloną cenę za dostarczony przedmiot kontraktu, natomiast sprzedający (zajmujący tzw. pozycję krótką) ma dostarczyć przedmiot kontraktu w umówionym terminie. Przedmiot kontraktu nazywany jest instrumentem bazowym lub podstawowym. Instrumenty pochodne stanowią bogatą grupę instrumentów finansowych, jednak najczęściej omawianymi typami są kontrakty *forward*, *futures*, *swap* i *opcje*(2). Zanim przejdziemy do bardziej szczegółowego opisu opcji, hasłowo przedstawimy trzy pierwsze typy kontraktów.

Kontrakty *forward* są kontraktami niestandaryzowanymi, dlatego handel nimi odbywa się na rynku pozagiełdowym. Jedna ze stron zobowiązuje się do dostarczenia danego dnia określonego towaru lub aktywa, natomiast druga – do nabycia go po cenie określonej w momencie zawarcia umowy. Często

(2) Ang. *option*.

zamiast fizycznego dostarczenia przedmiotu transakcji ma miejsce jedynie odpowiednie rozliczenie gotówkowe.

Kontrakty *futures* w sensie funkcjonalności przypominają kontrakty *forward*. Jednakże są one instrumentami wystandaryzowanymi, zatem wartość kontraktu wyznaczana jest na rynku, a każda ze stron kontraktu ma możliwość zamknięcia go przed terminem wygaśnięcia w dowolnej chwili poprzez zajęcie pozycji przeciwnej.

Kontrakt *swap* (wymiany) zobowiązuje obie strony umowy do wymiany przepływów pieniężnych w określonych przedziałach czasu. W zależności od typu umowy strony płacą „raty” według stopy stałej lub zmiennej ewentualnie w różnych walutach.

1.2. *Opcje.* Po nieformalnym zaprezentowaniu kilku rodzajów instrumentów pochodnych przechodzimy do szczegółowego opisu tego, który interesuje nas najbardziej – opcji.

Definicja 1.2.1. Kontrakt opcyjny (opcja) jest umową, na podstawie której jedna strona (posiadacz opcji) ma prawo do zrealizowania opisanej umową transakcji albo otrzymania określonej wypłaty, a druga (wystawca opcji) zobowiązuje się być stroną transakcji lub wypłacić wyznaczoną kwotę.

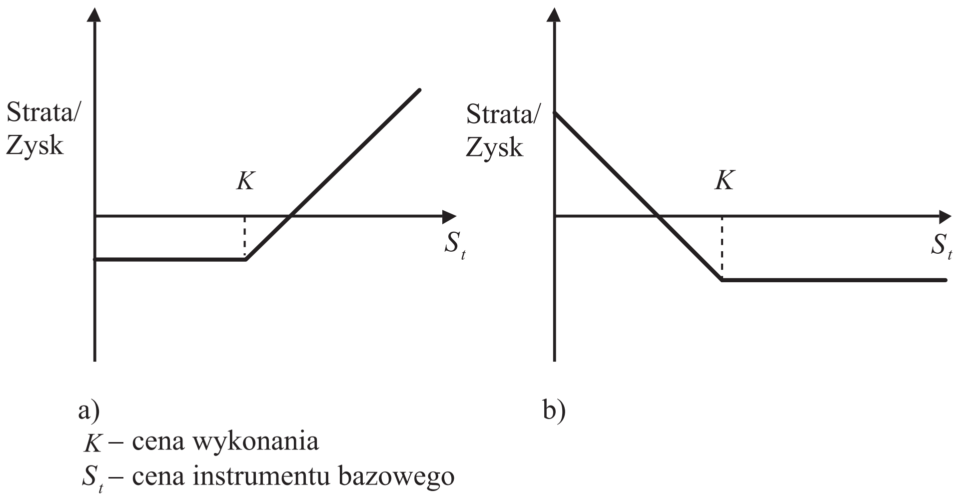
Jak widać opcja nie jest instrumentem "symetrycznym" – tzn. zajmujący pozycję długą będzie realizował umowę tylko wtedy, kiedy będzie to dla niego korzystne (więc nie straci), natomiast strona umowy zajmująca pozycję krótką ma obowiązek ją wykonać, jeśli druga strona tego chce (zatem nie zyska). Z tego powodu wystawca otrzymuje od nabywcy tzw. premię, która ma zrekompensować asymetrię. Kontrakt opcyjny określa wyraźnie: termin wygaśnięcia opcji T, termin lub terminy, w których opcja może być realizowana, rodzaj opcji – w tym formułę wyliczania premii – oraz instrument bazowy. Ten ostatni parametr jest obiektem, o którego cenę „zakładają się” strony, a punktem odniesienia jest cena wykonania – cena, po jakiej wystawca opcji jest zobowiązany sprzedać lub kupić (w zależności od rodzaju opcji) instrument bazowy. W zależności od tego, o jaki instrument bazowy chodzi, dzielimy (podajemy tu najbardziej tradycyjne przykłady) opcje na: akcje, indeksy giełdowe, waluty, obligacje, kontrakty *futures*, stopy procentowe, kontrakty IRS (kontrakty wymiany na stopę procentową).

Termin bądź terminy możliwej realizacji opcji narzucają kolejny podział:
- opcje europejskie (realizacja kontraktu może nastąpić tylko w terminie wygaśnięcia opcji);
- opcje amerykańskie (można wykonać opcję w dowolnym terminie aż do i włącznie z dniem wygaśnięcia);
- opcje bermudzkie (mają określone kilka momentów w okresie do wygaśnięcia opcji, w których można je wykonać).

Kolejne rozróżnienia dotyczą między innymi sposobów obliczania wypłaty z opcji lub warunków, jakie mogą aktywować lub blokować wykonanie opcji. Klasyfikacja tego rodzaju jest bardzo bogata, my pozwolimy sobie podać jedynie charakterystyki konieczne do zrozumienia tego artykułu.

Definicja 1.2.2. Opcje waniliowe (ang. *plain vanilla options*) są to kontrakty, w których przedmiotem umowy jest kupno/sprzedaż (odpowiednio jest to opcja kupna – ang. *call*/opcja sprzedaży – ang. *put*) danego instrumentu bazowego po określonej cenie wykonania K.

Przy tak opisanych warunkach w dowolnej chwili t wartość opcji dla posiadacza wynosi odpowiednio: dla opcji kupna – $\max(S_t - K, 0)$, dla opcji sprzedaży – $\max(K - S_t, 0)$, gdzie S_t jest ceną aktywa w chwili t. Profile wypłat nabywcy opcji kupna i sprzedaży przedstawiają wykresy 1.1.a i 1.1.b.

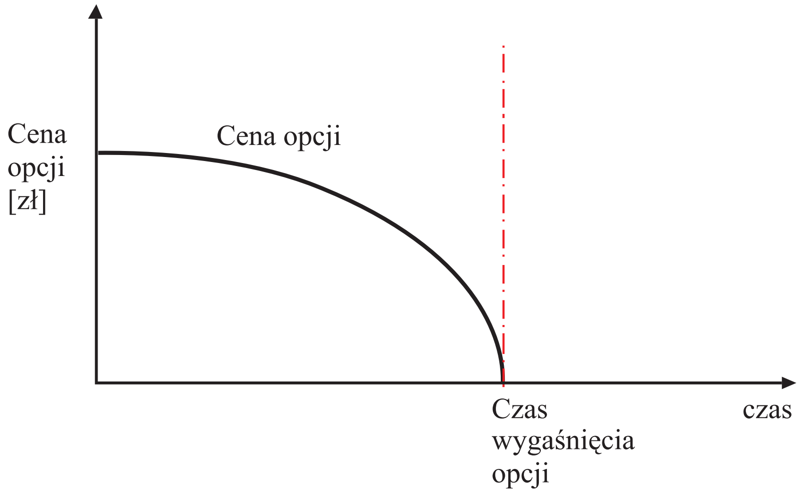


Wykres 1.1. Profile wypłaty nabywcy w opcji kupna (a) i sprzedaży (b).

Definicja 1.2.3. W zależności od relacji ceny opcji S_t i ceny wykonania K rozróżnia się trzy sytuacje. Opcja jest:

- w cenie (ang. *in the money*), gdy opłaca się ją wykonać, czyli dla opcji kupna $S_t > K$ (dla opcji sprzedaży nierówność jest przeciwna),
- po cenie (ang. *at the money*), gdy cena wykonania jest równa cenie instrumentu bazowego,
- nie w cenie (ang. *out of the money*), gdy nie opłaca się jej wykonać, czyli dla opcji kupna $S_t < K$ (nierówność jest odwrotna dla opcji sprzedaży).

Uwaga 1.2.4. Im dłuższy czas do terminu wygaśnięcia, tym większa jest wartość zarówno opcji kupna, jak i opcji sprzedaży. Tłumaczy się to zwykle tym, że im więcej czasu pozostało do terminu wygaśnięcia opcji, tym więcej może się jeszcze zmienić, a ponieważ wypłata z opcji jest ograniczona z dołu przez 0, będą to zmiany na lepsze. Wykres 1.2. przedstawia zależność ceny opcji od czasu.



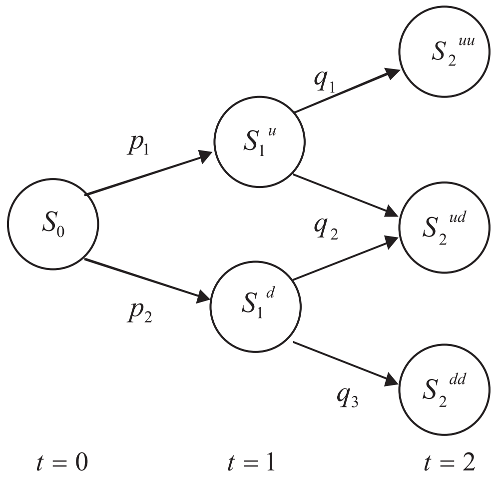
Wykres 1.2. Zależność ceny opcji od czasu

1.3. *Modele wyceny opcji.* Modeli wyceny opcji jest wiele, co najmniej tyle, ile teorii próbujących opisać dynamikę cen instrumentów bazowych. Na przykład można je podzielić na dwa rodzaje w zależności od tego, czy prowadzone są rozważania dla przypadku dyskretnego czy ciągłego. Za Weronem [5] podamy poniższe dwa typy wraz z krótką charakterystyką.

Pierwszy typ to model dyskretny - drzewa dwumianowe. W tym dość wyidealizowanym przypadku zakładamy, że instrument bazowy w następnym rozważanym momencie może osiągnąć jeden z dwóch stanów: spaść lub wzrosnąć osiągając określoną cenę. Graficznie ten model przedstawiany jest na drzewie dwumianowym (ang. *binomial tree*), w którym wierzchołki określają ceny w kolejnych momentach czasu, a połączenia między nimi pokazują kierunek ruchu cen i mają zwykle określone prawdopodobieństwo. Cenę opcji wyznaczamy, licząc wartość oczekiwaną przyszłych możliwych wypłat z instrumentu bazowego z odpowiednim uwzględnieniem zmiany wartości pieniądza w czasie (patrz wykres 1.3.).

Jako drugi model zaprezentujemy najczęściej stosowany i uznawany za fundamentalny wzór Blacka-Scholesa, który zakłada istnienie ciągłej przestrzeni stanów. Poniżej opiszemy podstawową jego wersję - dla europejskiej opcji kupna, z której możliwe jest wyprowadzenie wzorów dla bardziej skomplikowanych typów opcji. W modelu Blacka-Scholesa zakłada się, że cena instrumentu bazowego S (zwykle akcji nie płacącej dywidendy) spełnia równanie:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{1.9}$$



S_0	– cena instrumentu bazowego w chwili 0,
S_1^{u}, S_1^{d}	– ceny instrumentu bazowego w chwili 1, gdy (odpowiednio) cena wzrośnie, spadnie,
p_1, p_2	– prawdopodobieństwa ruchu ceny (odpowiednio) w górę i w dół,
S_2^{uu}, S_2^{ud}, S_2^{dd}	– ceny instrumentu bazowego w chwili 2 w zależności od scenariusza
q_1, q_2, q_3	– odpowiednie prawdopodobieństwa zdarzeń losowych

Wykres 1.3. Drzewo dwumianowe dwuokresowe

Dla ceny funkcji wypłaty postaci

$$C_T = \max(S_T - K, 0) \tag{1.10}$$

zachodzi następujący wzór na cenę C_t opcji w chwili $0 \leq t \leq T$:

$$C_t = S_t \cdot N(d_1(S_t, T-t)) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2(S_t, T-t)), \tag{1.11}$$

gdzie

$$d_1(S_t, T-t) = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{1.12}$$

oraz

$$d_2(S_t, T-t) = d_1(S_t, T-t) - \sigma\sqrt{T-t}, \tag{1.13}$$

gdzie σ nazywamy zmiennością implikowaną (jest parametrem wyznaczanym zwykle na podstawie danych empirycznych), r jest bezryzykowną stopą procentową, $N(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0,1)$, a W to proces Wienera.

2. Opcja na lot. Wycena biletów lotniczych jest jednym z najbardziej popularnych przykładów stosowania tzw. dyskryminacji cenowej, czyli wyznaczania różnej ceny dla różnych konsumentów za to samo dobro czy usługę. Jak komentuje w swojej pracy A. Odlyzko [11], w przypadku zwykłych linii lotniczych przydatnym narzędziem jest podział na klasy (podobnie do systemu stosowanego wcześniej dla kolei). Działa tu pewien efekt psychologiczny: ci, których stać na zapłacenie za bilet wyższej klasy, mają bać się podróży w gorszych warunkach i zdecydować się na droższy bilet. Taka polityka sprawia, że dyskryminacja cenowa jest akceptowana przez pasażerów. W tanich liniach nie obowiązuje podział na klasy, tak więc różnicę ceny odnotowujemy tylko w funkcji czasu.

Dokładna analiza regulaminów linii lotniczych i ich modeli biznesowych (z którą dokładniej zapoznać się można w Dodatku A) pozwala zrozumieć, dlaczego bilety tzw. 'tanich przewoźników' są często tańsze niż bilety przewoźników tradycyjnych. Natomiast zarówno z przyjętego przez tanie linie lotnicze modelu sprzedaży biletów jak i z obserwacji empirycznych wynika, że wraz ze zbliżaniem się do chwili wylotu, cena biletu rośnie. Fakt ten będzie miał istotne implikacje dla modelu wyceny.

Po przytoczeniu najważniejszych informacji dotyczących funkcjonowania tanich linii, postaramy się wyjaśnić, dlaczego bilet lotniczy tanich linii może stać się powodem zainteresowania matematyki finansowej. Warto dodać, że zaprezentowany poniżej model może mieć znacznie szersze zastosowanie w systemie transportowym. Będzie to miało miejsce w sytuacji, kiedy przewozy danym środkiem komunikacji są w rękach prywatnych i konkurujących ze sobą operatorów, a na rynku nie ma nadmiernych regulacji. Dobrym przykładem mogą być tutaj brytyjskie koleje, gdzie, w odróżnieniu od warunków polskich, ceny biletów zmieniają się w czasie w podobny sposób, jak w tanich liniach lotniczych.

2.1. *Bilet jako kontrakt opcyjny na nowym rynku.* W najbardziej standardowym podejściu bilet linii lotniczej ma być gwarancją (z dokładnością do wypadków losowych) odbycia podróży w wybranym terminie i kierunku, czyli mówiąc potocznie 'przelecenia się'. Dodatkowo, regulaminy przewoźników dopuszczają często możliwość zwrotu lub zmiany niektórych parametrów([3]) biletu. Zatem fakt wykupienia biletu lotniczego nie jest kontraktem wiążącym definitywnie nabywcę z linią, daje jedynie temu pierwszemu możliwość skorzystania z usługi, za którą zapłacono – jednak nie oznacza przymusu takiego działania. Pojawia się zatem znana nam już asymetria zobowiązań między stronami umowy, co w połączeniu z możliwością zmiany nazwiska pasażera na bilecie powoduje, że możemy potraktować bilet linii lotniczej jako opcję europejską na wybrany lot – ten ostatni stanowić więc

([3]) Np. nazwiska podróżującego pasażera.

będzie instrument bazowy dla tak pojmowanego derywatu.

Jak na nowy i analizowany, jak na razie, jedynie teoretycznie instrument przystało, nie ma obecnie rozwiniętego rynku wtórnego na bilety lotnicze tanich linii. Jednak widać już jego początki. W Polsce najlepszym przykładem jest serwis Allegro.pl, gdzie można obecnie znaleźć bilety lotnicze, niekoniecznie jednak sprzedawane w ramach modelu spekulacyjnego. Warto dodać, że tak badany rynek przelotów tanimi liniami rozwija się bardzo dynamicznie: (na podstawie artykułu Kuźmicza [6]) w pierwszym kwartale tego roku na polskich lotniskach odprawiło się ponad 3,63 mln pasażerów, czyli aż o 32% więcej niż w tym samym czasie w ubiegłym roku. Jest to znacząca dynamika wzrostu, zwłaszcza, że ta część roku nie należy do najbardziej popularnych, jeśli chodzi o loty.

2.2. *Uwagi do konstrukcji modelu.* Zanim przejdziemy do modelu matematycznego, chcemy w tej sekcji poświęcić trochę miejsca na wyjaśnienie założeń i celów, jakie przyjęliśmy.

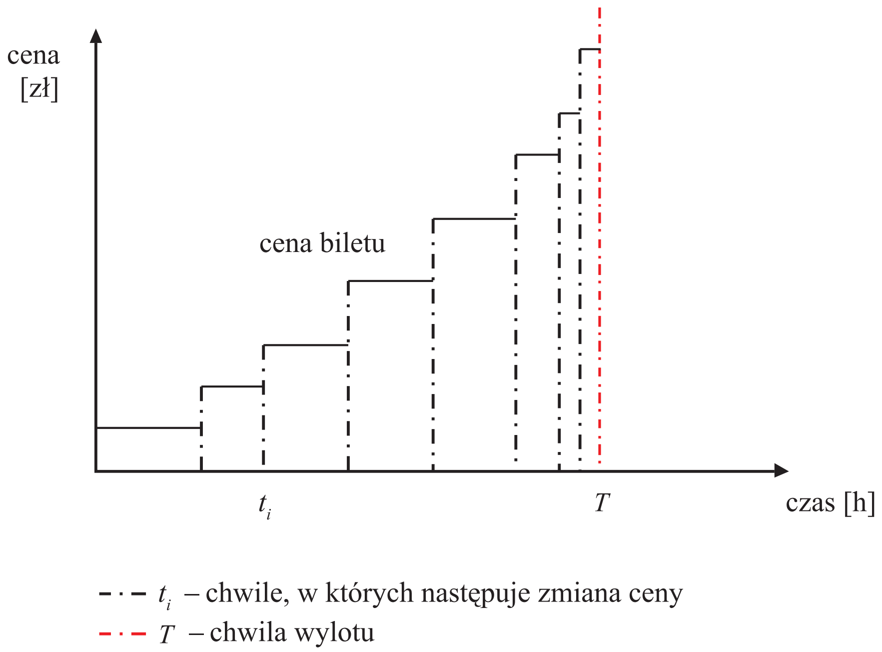
Jak pisaliśmy już we wprowadzeniu, zauważalny jest dynamiczny rozwój instrumentów pochodnych, a także wzrost ich złożoności oraz powiązań między nimi. To wszystko sprawia, że nawet najlepsi specjaliści pracujący dla najpotężniejszych instytucji przestali dobrze rozumieć zachowanie wielu z nich. Przyczyny tego można świetnie zrozumieć analizując historię rynków finansowych przedstawioną w książce Gregory'ego Millmana „*Czas spekulacji...*” [7]. Autor przytacza przykład traderów z wspominanego już Salomon Brothers, którzy w 1985 roku, gdy wypuszczono pierwsze opcje na obligacje dłużne skarbu państwa, uznali, że skoro mają już modele do handlowania opcjami na opcje na obligacje, wiedzą jak skutecznie zarabiać. I rzeczywiście przez jakiś czas zyski z przeprowadzanych transakcji były nawet większe niż pierwotnie przewidywano, jednak nieoczekiwany ruch Rezerwy Federalnej pokrzyżował plany traderów. Jeden z czołowych ludzi zajmujących się tymi transakcjami w Salomon Brothers w tamtym okresie, Lawrence E. Hilbrand skomentował tę dość kosztowną wpadkę następująco: „*Stwierdziliśmy, że naszym modelom czegoś brakuje. Zdaliśmy sobie sprawę, że niektóre z założeń, które stosowaliśmy, po prostu nie odpowiadają rzeczywistości*”. Podobne kłopoty, lecz o znacznie poważniejszych konsekwencjach, spotkały fundusz LTCM (ang. *Long Term Capital Management*), którego współzałożycielami byli Robert Merton i Myron Scholes – twórcy znanych modeli dotyczących wyceny, za które otrzymali nagrodę Nobla z dziedziny ekonomii. Mimo początkowych sukcesów w praktycznym wykorzystaniu modeli matematycznych, fundusz ostatecznie upadł w 1998 roku. Upadek LTCM był na tyle poważnym zagrożeniem dla płynności sektora bankowego, że zaistniała konieczność interwencji Rezerwy Federalnej. Jako jedną z przyczyn porażki uznano problem tzw. ‘długiego ogona’, kiedy to bardzo mało prawdopodobne zdarzenie (nie uwzględniane zwykle w modelu) ma jednak miejsce, a jego konsekwencje są decydujące dla danej sytuacji. Część problemów LTCM wynikła ze stosowania modeli, których fundamentalne założenia różnią się od warunków świata realnego([4]). Niektórzy uważają, że ważnym przykładem braku dostosowania modelu do rzeczywistości jest przedstawiony powyżej ciągły model Blacka-Scholesa stosowany dla wyceny opcji, kiedy na rynku notowania cen instrumentów są jak najbardziej dyskretne. Dodatkowo wśród badaczy i praktyków rynku pojawiają się głosy, że kolejne założenia modelu nagrodzonego w 1972 roku nagrodą Nobla, takie jak możliwość nieograniczonej krótkiej sprzedaży czy pożyczania pieniędzy po stałej stopie procentowej, pozwalają określić tę metodę wyceny jako piękną konstrukcję teoretyczną, która coraz mniej przystaje do rzeczywistości [8]. Dlatego też kierując się uwagami Karasińskiego [9] na temat konstruowania dobrych modeli postaramy się, by konstruowany model jak najlepiej uwzględniał rzeczywiste warunki rynkowe, a także był możliwy do zaimplementowania. Dodatkowo zwracamy uwagę na fakt, że przedstawiony model wyceny nie będzie interpretacją istniejących i używanych modeli (w tym modelu Blacka-Scholesa), lecz reprezentuje zupełnie odmienne podejście do problemu.

Podsumowując tę część rozważań, warto wspomnieć, że wycena, instrumentów finansowych, zwłaszcza nowych, dla których rynek nie jest uregulowany, a uwarunkowania są dopiero badane, nie powinno mieć statusu „nauki ścisłej". Dodatkowym utrudnieniem dla opisywania dopiero rozwijających się rynków finansowych jest fakt, że mimo założeń teoretycznych, rynki nie zachowują się racjonalnie. Jak pisze Stephen Ross w odniesieniu do neoklasycznych finansów behawioralnych [10]: „*people aren't rational*" oraz „*data doesn't fit the established orthodox views*", dlatego „*prices are determined by 'everyman' not by 'economan'*".

3. Matematyczny model biletu jako opcji. Przedstawiliśmy już intuicje, jakie stoją za przeprowadzonymi przez nas rozważaniami. Czas zatem na opisanie modelem matematycznym interesującego nas instrumentu. Zaczniemy od wersji najprostszej dla posiadacza biletu, by stopniowo, uwzględniając kolejne elementy regulaminu, przejść do wersji coraz bardziej skomplikowanych, określających zyski ze sprzedaży opcji biletowej dla obu stron transakcji.

([4]) W tym kontekście warto przypomnieć słynny komentarz Johna Maynarda Keynesa dotyczący korzystania przez inwestorów z hipotezy racjonalnego rynku, który zawsze dąży do równowagi – „*The market can stay irrational longer than you can stay solvent*". Dokładny oddający wszelkie niuanse znaczeniowe przekład tego zdania nie jest prosty, jednak dobrym przybliżeniem wydaje się 'rynek może zachowywać się nieracjonalnie dłużej niż inwestor pozostaje wypłacalny'.

3.1. *Zalety wczesnego zakupu biletu.* Jak już pisaliśmy, cena biletu u przewoźnika rośnie wraz z czasem i im bliżej do chwili wylotu, tym więcej musimy zapłacić za bilet – na wykresie 3.1. przedstawiliśmy, jak cena ta zmienia się w czasie. Z przykładowymi cenami biletów i ich zmianami w czasie czytelnik może się zapoznać w Dodatku B.



Wykres 3.1. Zmiana ceny biletu w czasie.

Zanim przejdziemy do dalszych rozważań, zwróćmy uwagę na fakt, że linie podają ceny biletów w sposób dyskretny, zgodnie ze skokowym algorytmem wyznaczania cen. Na rynku wtórnym możemy natomiast aproksymować ceny biletów w sposób ciągły i dlatego wprowadzona funkcja S określająca maksymalną możliwą cenę biletu na rynku wtórnym będzie zależeć od t w sposób ciągły. Dodajmy jeszcze, że czas trwania poszczególnych inwestycji jest stosunkowo krótki, więc dla uproszczenia rozważań nie uwzględniamy w modelu zmiany wartości pieniądza w czasie.

Definicja 3.1.1. Wprowadźmy funkcję $S(t)$, która będzie określać maksymalną możliwą cenę biletu na rynku wtórnym w zależności od czasu $t \in [t_0, T]$.

Uwaga 3.1.2. Tak zdefiniowana S jest (zwykle) rosnąca funkcją zmiennej t. Istnieje niewielki i skończony zbiór sytuacji, kiedy S może nie być funkcją rosnącą. Jednak bez większej szkody w dalszych rozważaniach pominiemy te zdegenerowane przypadki i będziemy przyjmować, że S jest funkcją rosnącą.

Wniosek 3.1.3. *Zysk pasażera, który kupił bilet w chwili t wynosi*

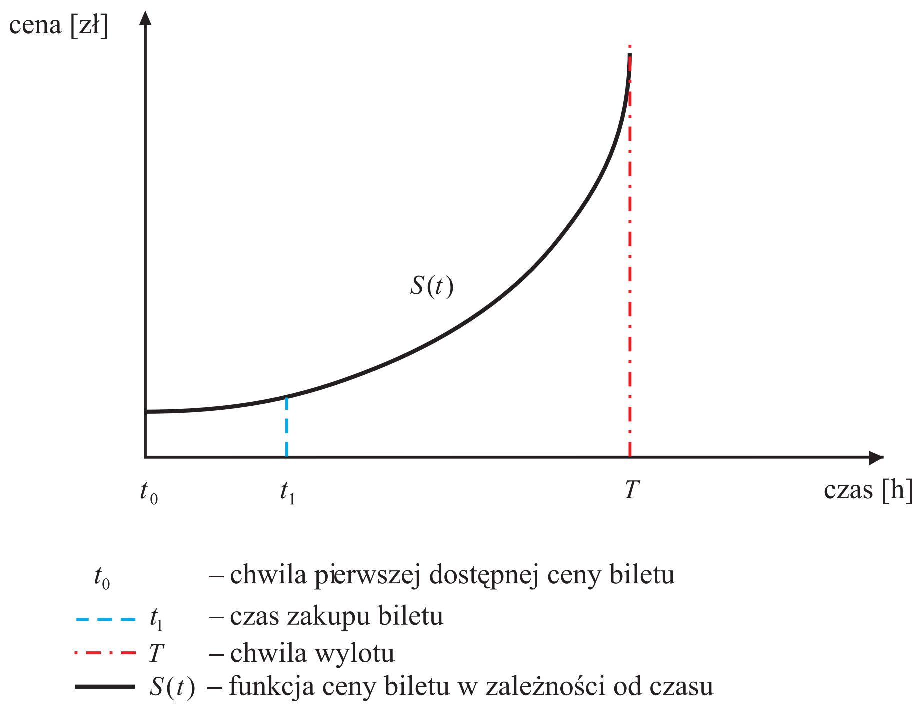
$$\Pi(t) = S(T) - S(t). \tag{3.1}$$

Wniosek 3.1.4. *W przypadku konkretnego lotu (kiedy T jest ustalone) zysk pasażera zmniejsza się wraz ze zbliżającym się terminem wylotu – $\Pi(t)$ jest funkcją malejącą ze względu na zmienną t.*

Uwaga 3.1.5. Traktując cenę biletu w chwili wylotu jako cenę wykonania opcji, możemy zauważyć, że opcja biletowa (*call*) jest zawsze w pozycji *at the money* (czyli $S(t) \leq S(T)$).

Wniosek 3.1.7. *Na rynku istnieje możliwość arbitrażu (czyli uzyskania zysku bez ryzyka).*

Opisany powyżej model ilustruje wykres 3.2.



Wykres 3.2. Wzrost ceny biletu.

3.2. *Wielkość zysku z tytułu wczesnego zakupu*

Uwaga 3.2.1. Pasażer korzysta z instrumentu bazowego (lotu) w chwili T, jednak w tym momencie cena biletu nie jest określona – nie znamy ceny spot. Zwykle ostatnia wycena podana jest około kilka godzin przed wylotem, chwilę tę określimy jako t_k.

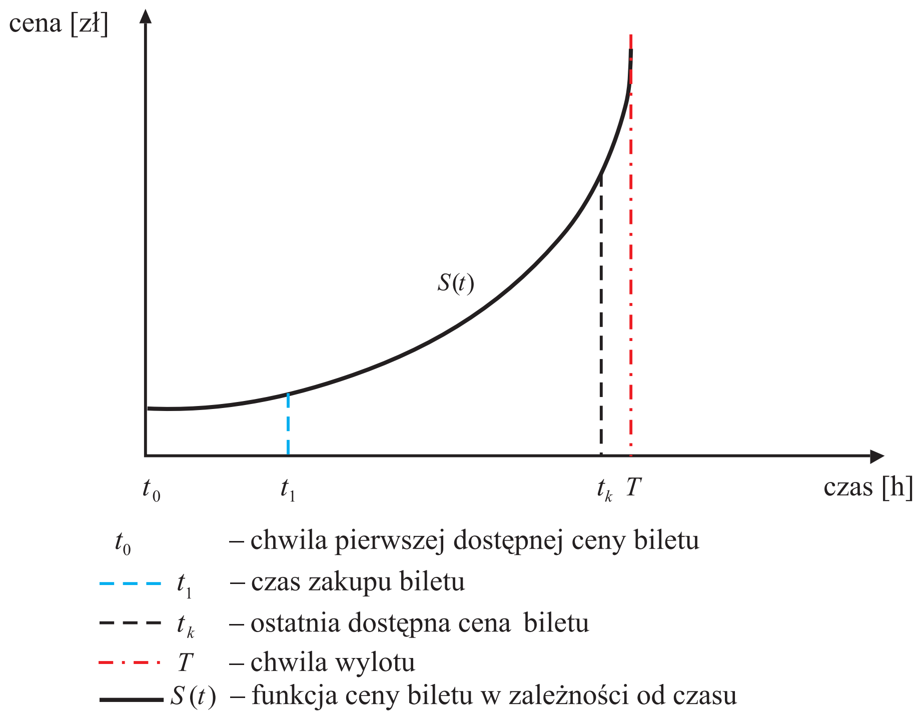
Uwaga 3.2.2. Zatem funkcja S określona jest dla $t \in [t_0, t_k]$, gdzie $t_k < T$.

Wniosek 3.2.3. *Chcąc móc dokładnie wyznaczyć zysk pasażera możemy jedynie wziąć*

$$\Pi_k = S(t_k) - S(t_1), \tag{3.2}$$

gdzie t_k jest ściśle zależne od T.

Sytuację tę możemy zaobserwować na wykresie 3.3.



Wykres 3.3. Uwzględnienie ostatniej wyceny.

3.3. *Odsprzedaż biletu.* Dwie poprzednie sekcje opisywały sytuację pojedynczego podróżującego, któremu zdecydowanie opłaca się kupić bilet jak najwcześniej. Teraz zajmiemy się modelem odsprzedania biletu, w praktyce realizowanym przez dopuszczalną regulaminem zmianę nazwiska na bilecie. Rozważymy zatem warunki brzegowe dla tzw. „pozycji długiej” dla opcji biletowej.

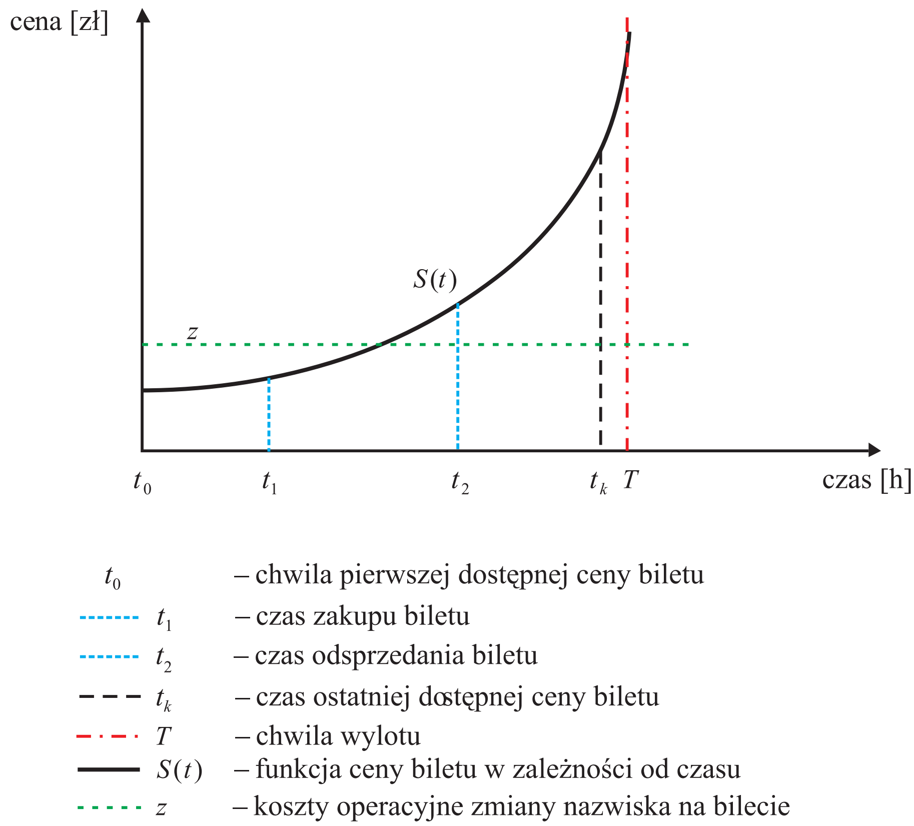
Uwaga 3.3.1. W przypadku, gdy rozważamy sprzedaż danego biletu lotniczego, pojawia się kwestia wykonalności tej operacji, zatem rozważania musimy zawężać tylko do tych sytuacji, gdzie zmiana nazwiska na bilecie jest możliwa (patrz Dodatek A).

Definicja 3.3.2. Jeśli zmiana nazwiska na bilecie pociąga za sobą pewne koszty operacyjne, to definiujmy $Z(t)$ jako całkowite koszty operacyjne związane ze zmianą nazwiska. W ramach obecnie obowiązujących regulaminów linii lotniczych $Z(t)$ są stałe, czyli $Z(t) = z$.

Wniosek 3.3.3. *Zysk z operacji zakupienia biletu w czasie* t_1 *i sprzedania go w czasie* t_2 *wynosi*

$$\Pi = S(t_2) - S(t_1) - z. \tag{3.3}$$

Tak sformułowany model ilustruje wykres 3.4.



Wykres 3.4. Model z kosztami operacyjnymi.

3.4. *Odsprzedaż biletu ze zniżką.* Opisany powyżej model odsprzedaży biletu opisuje zysk sprzedającego, ale nie jest w żaden sposób korzystny dla odkupującego. W tej sekcji postaramy się uwzględnić i tę kwestię.

Definicja 3.4.1. Określamy funkcję $R(t)$ jako różnicę pomiędzy maksymalną możliwą ceną na rynku wtórnym a ceną, za jaką można odsprzedać bilet tak, by dla potencjalnego odkupującego było to atrakcyjne. Wtedy

$R(t)$ stanowi zniżkę określoną przez odsprzedającego bilet przy uwzględnieniu warunków rynkowych w chwili t.

WNIOSEK 3.4.2. *Cenę odsprzedania biletu, czyli cenę opcji określimy zatem jako*:

$$C(t) := S(t) - R(t). \tag{3.4}$$

UWAGA 3.4.3. $R(t)$ może przyjmować wartości ujemne.

Powyższa sytuacja może mieć miejsce np. wówczas, gdy linia lotnicza wyprzedała już bilety, wtedy odsprzedający może zażądać ceny przekraczającej maksymalną cenę biletu u przewoźnika. Scenariusz ten jest pokazany na wykresie 3.5a.

WNIOSEK 3.4.4. *Zysk z operacji zakupienia biletu w momencie* t_1 *i sprzedania go w momencie* t_2 *wynosi w tym modelu*:

$$\Pi = C(t_2) - S(t_1) - Z(t) = S(t_2) - S(t_1) - R(t_2) - z, \tag{3.5}$$

a zysk nabywcy:

$$\Pi_N = S(t_2) - C(t_2) = R(t_2). \tag{3.6}$$

Opisany problem ilustrują wykresy 3.5 i 3.5a.

3.5. *Odsprzedaż biletu przy uwzględnieniu możliwości anulowania biletu.* W tej części weźmiemy pod uwagę kolejne uwarunkowania, które dają nam regulaminy tanich linii lotniczych.

UWAGA 3.5.1. Zwykle, o ile tylko regulamin pozwala na zmianę nazwiska pasażera, możliwe jest to nawet do godziny przed odlotem.

UWAGA 3.5.2. W części linii możliwe jest także oddanie biletu za opłatą (zwykle do ok. 24 godzin przed danym lotem).

WNIOSEK 3.5.3. *Zysk z operacji zakupienia biletu w chwili* t_1 *i sprzedania go w chwili* t $(t_1 < t < t_k)$ *przy uwzględnieniu tych warunków można opisać funkcją*:

$$\Pi(t) = C(t) - S(t_1) - R(t) - z, \tag{3.5a}$$

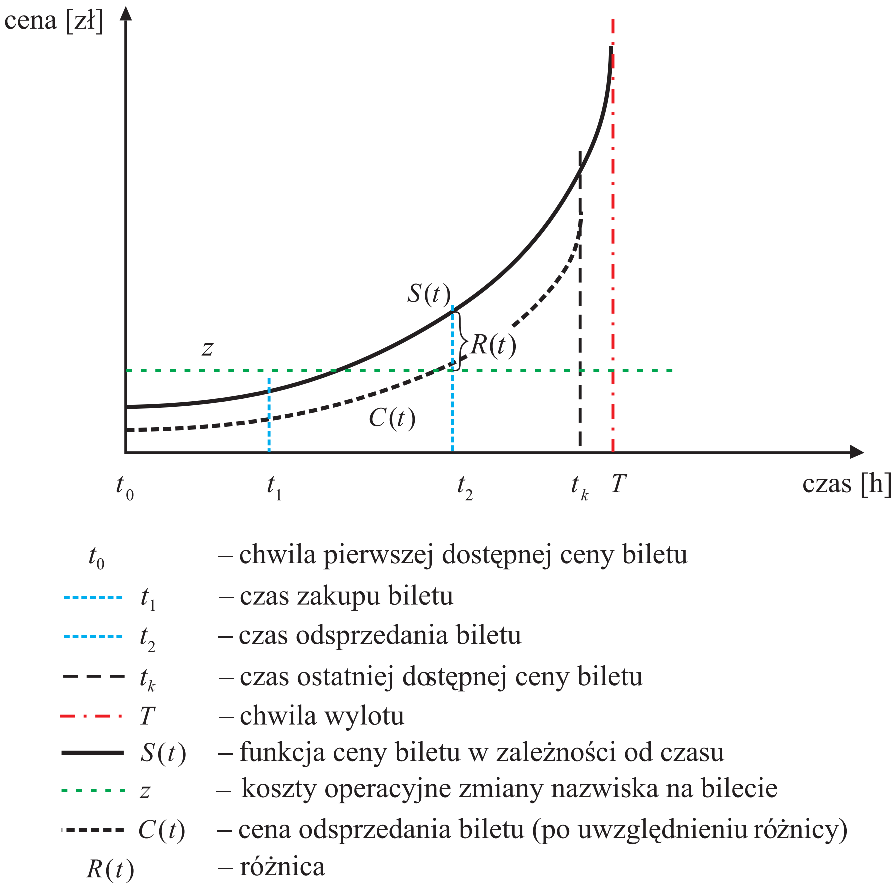
jeżeli uda się sprzedać bilet. Natomiast w sytuacji przeciwnej mamy dwie możliwości:

$$\Pi(t) = -S(t_1) + D \quad \text{dla } t \in [t_1, t_t], \tag{3.7}$$

gdzie D *określa wielkość zwrotu za oddany bilet przy uwzględnieniu odpowiednich kosztów operacyjnych, a* t_t *jest ostatnią możliwą chwilą oddania biletu* (*patrz wykres 3.6*), *albo*

$$\Pi(t) = -S(t_1) \quad \text{dla } t \in [t_t, T]. \tag{3.8}$$

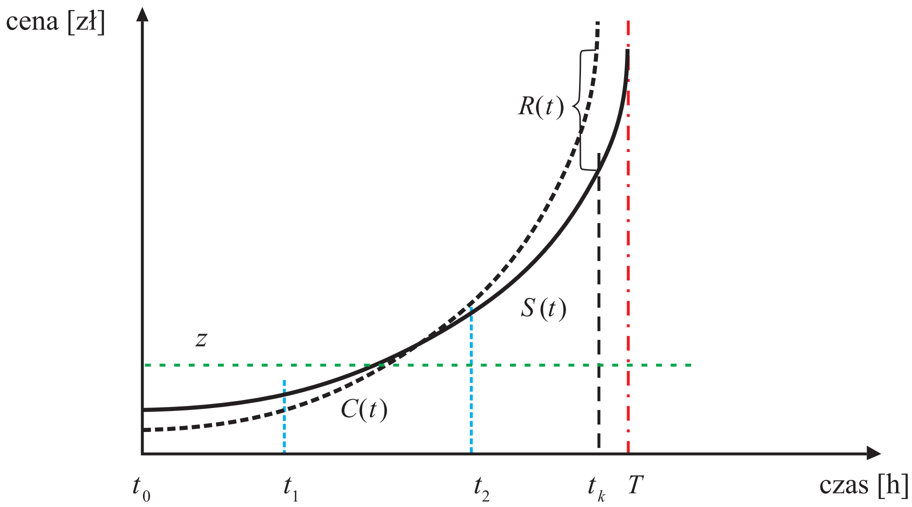
Przy czym warto dodać, że zwykle $D < S(t_1)$. Jeżeli nastąpi odkupienie biletu, zysk nabywcy jest taki sam jak w poprzedniej wersji modelu (patrz wzór 3.6).



Wykres 3.5. Model z różnicą.

Jak widać obostrzenia regulaminu wymuszają komplikację modelu poprzez wprowadzanie kolejnych parametrów i warunków brzegowych. Do tej pory w naszym opisie uwzględniliśmy większość praktycznych możliwości, które dają regulaminy przewoźników. Mając opisany pojedynczy bilet pokażemy, jak można podejść do zagadnienia budowania portfela złożonego z instrumentów tego typu.

4. Konstrukcja i parametry portfela opcji. Zanim zagłębimy się w zagadnienie budowy portfela warto zadać sobie pytanie, czy zagadnienie to ma jakieś znaczenie praktyczne.

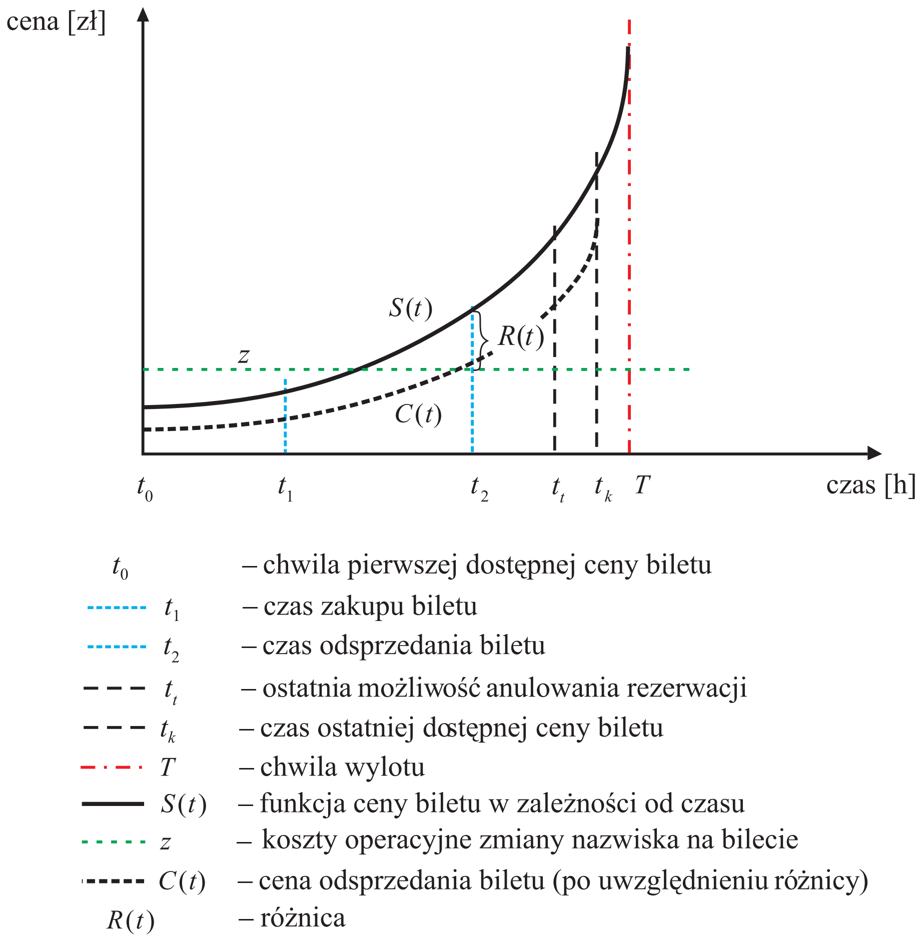


t_0 – chwila pierwszej dostępnej ceny biletu
t_1 – czas zakupu biletu
t_2 – czas odsprzedania biletu
t_k – czas ostatniej dostępnej ceny biletu
T – chwila wylotu
$S(t)$ – funkcja ceny biletu w zależności od czasu
z – koszty operacyjne zmiany nazwiska na bilecie
$C(t)$ – cena odsprzedania biletu (po uwzględnieniu różnicy)
$R(t)$ – różnica

Wykres 3.5a. Model z możliwością narzucenia dowolnie wysokiej różnicy.

Można podać co najmniej dwa przykłady praktycznego wykorzystania takiego portfela biletów. Pierwsze to model spekulacyjny: agent biletowy, który będzie chciał handlować nimi na rynku wtórnym, stara się zmniejszyć ryzyko poprzez dywersyfikację aktywów, czyli właśnie budowę odpowiedniego portfela. Kolejne zastosowanie odnosi się do dużych firm, w których częste podróże pracowników są koniecznością. Kwestia optymalizacji wydatków na bilety lotnicze jest sprawą niebagatelną, a odpowiednio planowane zakupy biletów mogą ten problem rozwiązać. W pozostałej części artykułu pokażemy kolejne, coraz bardziej rozbudowane, koncepcje konstrukcji portfela opcyjnego i wyprowadzenia jego parametrów według klasycznych sposobów analizy portfelowej podanych w pracy Markowitza [12].

4.1. *Konstrukcja portfela.* Jak już wspomnieliśmy, chcąc rozważyć portfel biletów, powróćmy do pierwszej wersji modelu opcji biletowej (sekcja 3.1.).



Wykres 3.6. Model z zaznaczoną ostatnią możliwością zwrotu biletu.

W najprostszej wersji będziemy budować portfel w następujący sposób:

1) każdy bilet jest na tę samą trasę,
2) raz w tygodniu kupujemy bilet na termin na za 3 miesiące (jeżeli taki bilet nie jest dostępny, wybieramy najtańszy z biletów na sąsiednie dni).

Jednak taki portfel nie daje możliwości skorzystania z faktu, że tani przewoźnicy latają na wielu trasach, a część z połączeń jest dużo popularniejsza od pozostałych. Chcąc więc uczynić portfel bardziej zdywersyfikowanym, przyjmijmy teraz, że konstruujemy go kupując bilety na różne trasy. Naturalnie, aby zrobić to w sposób jak najbardziej opłacalny, musimy rozważyć, jakie trasy byłyby najbardziej interesujące dla końcowych użytkowników biletów. Zatem konstrukcję takiego portfela możemy opisać następującym algorytmem: raz w tygodniu kupujemy po 1 bilecie na termin za 3 miesiące na każdą z wybranych tras.

Warto zwrócić uwagę, że możemy jeszcze skorzystać z faktu, że na prawie każdej popularnej trasie latają samoloty więcej niż jednej taniej linii. Zatem, aby w pełni wykorzystać możliwość dywersyfikacji portfela, będziemy konstruować go następująco: raz w tygodniu kupujemy bilet na termin za 3 miesiące na każdą z określonych tras wybierając tego przewoźnika, który w danym momencie oferuje najtańszy bilet.

Pokazaliśmy tym samym, jak stopniowo komplikując proces, możemy budować portfel bardziej uniwersalny (bo zawierający bilety na różne trasy) i tańszy dla inwestora (kiedy wybieramy najkorzystniejszą cenowo ofertę).

4.2. *Parametry portfela – zysk i stopa zwrotu.* Wzorując się na pracy H. M. Markowitza [12] opiszemy teraz podstawowe metody, którymi można się posłużyć do wyliczenia stopy zwrotu i ryzyka. Te parametry pozwalają na takie dobranie liczby instrumentów składających się na portfel, by możliwie było osiągnięcie jak największego zysku przy jak najmniejszym ryzyku.

Stopa zwrotu z opcji. Jeżeli założymy, że w przypadku każdego z biletów mamy określone prawdopodobieństwo tego, że bilet zostanie wykorzystany (jest to zatem prawdopodobieństwo, że opcja zostanie odkupiona/wykonana), przychód z pojedynczego biletu możemy policzyć jako wartość oczekiwaną. W przypadku biletu, który udało nam się już odsprzedać stopa zwrotu r będzie ilorazem zysku z transakcji Π (patrz 3.5) i zainwestowanego w to kapitału, czyli $S(t_1)$.

Stopa zwrotu z portfela opcji. Wyliczenie stopy zwrotu z portfela opcji opiera się na tej samej podstawowej metodzie – stopa zwrotu jest ilorazem zysku z portfela i jego wartości początkowej. Zakładamy, że posiadamy pewną wartość początkową kapitału V_0, którą planujemy przeznaczyć na zakup opcji. Pozostaje więc jeszcze kwestia wyliczenia zysku z portfela, a właściwie oczekiwanego zysku. Do ustalonej chwili (w której chcemy zmierzyć zysk z inwestycji) udało nam się sprzedać pewną ilość opcji/biletów z określonym już wcześniej prawdopodobieństwem. Dodatkowo mamy zakupioną pewną liczbę biletów, których jeszcze nie sprzedaliśmy, a termin wylotu jest późniejszy niż badany czas. Sumując te dwa elementy i uwzględniając początkową wartość, którą mieliśmy przeznaczyć na inwestycje, będziemy mogli wyliczyć stopę zwrotu z portfela.

Ryzyko opcji i całego portfela. Kiedy mamy już wyliczone stopy zwrotu z każdej części składowej portfela, możemy obliczyć ryzyko portfela korzystając ze standardowych wzorów analizy portfelowej.

Ryzyko pojedynczej opcji określone jest jako odchylenie standardowe σ_{ii}, które wynosi:

$$\sigma_{ii} = \sqrt{E[(r_i - \mu_i)^2]}, \tag{4.1}$$

gdzie r_i jest stopą zwrotu z i-tej opcji w pojedynczym podokresie historycznym, a $\mu_i = E(r_i)$ jest oczekiwaną stopą zwrotu z i-tej opcji.

Natomiast ryzyko portfela opcji V jest pierwiastkiem z wariancji portfela, zatem V wyrażone jest wzorem:

$$V = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij}}, \tag{4.2}$$

gdzie:

$$\sigma_{ij} = E[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)], \tag{4.3}$$

a X jest wektorem wag opisujących udział opcji w portfelu (t. że $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1, X_i \geq 0$).

Mając wyliczone parametry: stopę zwrotu i ryzyko portfela możemy za pomocą modelu Markowitza [12] wyznaczyć optymalny wektor X, dla którego oczekiwany zwrot z portfela jest największy, a ryzyko najmniejsze.

4.3. *Optymalizacja wartości końcowej ze względu na funkcję użyteczności.* Temat optymalizacji portfela możemy też analizować z innego punktu widzenia: uwzględniając zmienność portfela w czasie. Na podstawie Jakubowskiego [13] i Korna [14] postaramy się pokazać metodę, którą można posłużyć się, by znaleźć optymalną końcową wartość portfela względem użyteczności inwestora przy zadanych warunkach.

W tym celu określimy wartość rozszerzonego portfela, gdzie obok pewnej ilości aktywów ryzykownych (opcji biletowych), mamy także jeden z aktywów o indeksie $i = 0$ – kapitał w postaci lokaty bankowej. Zakładamy, że taki portfel jest samofinansujący się, czyli do portfela nie ma wpłat czy wypłat z zewnątrz – jest zdeterminowany wartością początkową i strategią postępowania z biletami. Ważnym założeniem jest też to, że zdyskontowana wartość portfela jest martyngałem.

Z drugiej strony zakładamy, że inwestor posiada tzw. *funkcję użyteczności* U (jest to funkcja niemalejąca, wklęsła, różniczkowalna, ma ciągłą pochodną oraz spełnia tzw. warunki Inady: $\lim_{x\to 0} U'(x) = +\infty$ oraz $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$), która pozwala mu określać, co daje mu większą użyteczność – czyli co jest dla niego lepsze.

Pamiętając, że wartość początkowa portfela jest określona jako V_0, z pomocą tak zdefiniowanego portfela i funkcji użyteczności jesteśmy w stanie metodą optymalizacji Lagrange'a wyznaczyć kandydata na maksymalną wartość końcową portfela opcji.

5. Zakończenie. W naszym artykule podjęliśmy się zaprezentowania, jak przelot tanią linią lotnicza może być traktowany jako instrument finansowy, czyli przedmiot zakładu rynkowego. Na początku artykułu przedstawiliśmy intuicje, jakie stoją za pomysłem szukania nowych instrumentów finansowych oraz przypomnieliśmy wybrane pojęcia i modele z zakresu inżynierii finansowej. Następnie opisaliśmy, jakie cechy biletu tanich linii pozwalają nam potraktować go jako opcję oraz jakie założenia stoją za konstruowanym przez nas modelem. Kolejno przedstawione wersje modelu matematycznego uwzględniają ograniczenia wynikające z regulaminów tanich linii, tak by mógł on jak najlepiej odzwierciedlać rzeczywiste warunki rynkowe, opisując jednocześnie zyski odprzedającego i odkupującego bilet. Warto tutaj przypomnieć, że zaproponowany model bazuje na podejściu innym niż te stosowane do tej pory. Z tej też przyczyny wydaje się on unikać części problemów związanych np. z modelem Blacka-Scholesa.

W ostatnim rozdziale omówiliśmy metodę konstrukcji portfela z takich opcji oraz znalezienia jego parametrów (stopy zwrotu i ryzyka) oraz zaproponowaliśmy sposób wyznaczania optymalnej oczekiwanej wartości końcowej portfela przy zadanej wartości początkowej. Pokazaliśmy więc, jak do prężnie rozwijającej się teorii instrumentów pochodnych dołączyć można kolejny oraz w jaki sposób matematyka finansowa może odpowiadać na pytanie o jego wartość i opłacalność. Ważną kwestią pozostaje, czy zaprezentowany model da się zastosować w praktyce. Z przeprowadzonych badań wynika, że zarówno wielkość rynku, również wtórnego, jak i jego dynamika wydają się być po temu wystarczające. Najlepszym tego dowodem może być fakt, że autorom artykułu złożono już ofertę przetestowania modelu w celach rynkowych. Jak więc widać chętnych do **zakładu o przelot** nie brakuje. Artykuł chcielibyśmy podsumować cytatem ze Steven'a Rossa [10]: „*Finance has unsolved problems. Thank God for that!*".

Podziękowania. Pierwsze idee związane z materiałem zawartym w tej pracy powstały w czasie pobytu jednego z autorów w Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences i Departament of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge. Pomysły te były dalej rozwijane w ramach projektu AFR (*Airlines and Freeriding*), w czasie Letniej Praktyki Badawczej prowadzonej w 2006 roku w Polskiej Akademii Nauk. Autorzy chcieli podziękować wszystkim osobom, które uczestniczyły w projekcie AFR, za interesujące rozmowy i inspirację.

Bibliografia

[1] M. Lewis, *Poker kłamców. Wspinaczka po ruinach Wall Street*, WAB, Warszawa, 1993.

[2] J. Roberts, *The cat walks alone*, Financial World, luty 2003.

[3] G. Tett, J. Chung, D. Wighton, *Banki zarabiają na naszej śmierci*, Financial Times, 24.11.2006, http://gilda.onet.pl/14,1374241,,3254,ft.html, dostęp online 25.11.2007.

[4] M. Rutkowski red., *Matematyka finansowa: instrumenty pochodne*, WNT, Warszawa, 2003.

[5] A. Weron, R. Weron, *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa, 1998.

[6] M. Kuźmicz, *Polacy lecą po rekord*, Gazeta Wyborcza, 13.06.2007.

[7] G. Millman, *Czas spekulacji. Jak zbuntowani handlarze walutą obalili centralne banki świata*, Philip Wilson, Warszawa, 1997.

[8] A. Gangahar, *Mispriced risk tests market faith in a prized formula*, Financial Times, 16.04.2008.

[9] P. Karasinski, *Mindless Fitting?*, zaproszony wykład w ramach programu Developments in Quantitative Finance w Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, sesja Modelling Philosophy w dniu 22.04.2005, http://www.newton.cam.ac.uk/webseminars/pg+ws/2005/dqf/dqfce3/0422/karasinski/ dostęp online 8.03.2008.

[10] S. Ross, *A Neoclassical Look at Behavioral Finance*, zaproszony wykład w ramach programu Developments in Quantitative Finance w Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, sesja Developments, Applications and Problems w dniu 8.07.2005 dostęp online 8.03.2008, http://www.newton.cam.ac.uk/webseminars/pg +ws/2005/dqf/dqfw02/0708/ross/.

[11] A. Odlyzko, *History of communication and its implication for the Internet*, AT&T Labs Research, June 16, 2000.

[12] H. M. Markowitz, *Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets*, Blackwell Publishers, Oxford, 1992.

[13] J. Jakubowski, *Modelowanie rynków finansowych*, SCRIPT, Warszawa, 2006.

[14] R. Korn, E. Korn, *Option Pricing and Portfolio Optimization. Modern Methods of Financial Mathematics*, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2000.

[15] M. Jędrzejczak, *Do Londynu i z powrotem za sto złotych*, Rzeczpospolita, 26.11.2007, dodatek „Moje podróże".

[16] Centralwings, *Ogólne warunki przewozu*, http://www10.centralwings.com/pl/130/index.html, dostęp online 26.11.2007.

[17] Easyjet, *Regulamin przewoźnika*, http://www.easyjet.com/PL/Zarezerwuj/regulations.html, dostęp online 25.11.2007.

[18] Germanwings, *Ogólne warunki przewozu*, http://www.germanwings.com/pl/Ogolne-Warunki-Przewozu.htm, dostęp online 25.11.2007.

[19] Wizzair, *Ogólne warunki przewozu pasażerów i bagażu*, http://book.wizzair.com/usful_information/general_conditions_of_carriage/, dostęp online 26.11.2007.

[20] SkyEurope, *Info*, http://www1.skyeurope.com/en/default.aspx?catid=145, dostęp online 27.11.2007.

[21] Ryanair, *Warunki i postanowienia dotyczące podróżowania*, http://www.ryanair.com/site/PL/conditions.php?pos=MYFLIGHT, dostęp online 27.11.2007.

Karina Piwarska
Wydzial Matematyki Informatyki i Mechniki
Uniwersytet Warszawski
E-mail: karina.piwarska@gmail.com

Kamil Kulesza
Instytut Badań Systemowych PAN
University of Cambridge
E-mail: Kamil.Kulesza@damtp.cam.ac.uk

Fly me: financial mathematics and low-cost airlines

Abstract. The derivatives are financial instruments whose value changes in response to the changes in underlying variables. Originally, they were based on commodities and used to reduce risk from varying prices. This strategy is often called hedging. However as financial markets have become more complex it is more and more difficult to distinguish between old fashioned hedging and speculation.

At present the derivatives' markets are one of the most interesting fields of research in financial mathematics. They are the point where theory and practice meet, an important factor in good applied mathematics. As a result a vivid exchange of ideas takes place between mathematicians and researchers from huge variety of fields like economics, physics and computer science. In the same time the markets are constantly evolving and new financial instruments are created every day. Nowadays, derivatives are being constructed not only for assets such as commodities, equities , bonds, interest rates, exchange rates, but also various indexes or even weather.

In order to make a transaction a buyer and a seller are needed. In this respect a financial instrument can be understood as a bet between two parties, each assuming that the market will move the way that they expect. In old times derivatives were mainly used to managed risk, for instance by securing fixed price for some asset in the future.

One of the types of derivatives are options that provide the right, but not the obligation, to engage in a future transaction on some fixed conditions. The transaction as such does not need to concern assets or securities, for instance the option can be exercise on certain services.

In the paper we show that low-cost airlines' tickets can be described as an option contract. While it is tempting to plug-in our description into known models for option valuation, we choose more practice oriented approach. We take into account the real life constrains and airlines' regulations we present a realistic model for option valuation. In such a framework we show that, in principle, an arbitrage is possible.

We conclude the paper with remarks on building and optimizing portfolio of such assets, having in mind speculation/trading as well as corporate hedging.
Key words: financial mathematics, derivatives' markets, systems' research, low-cost airlines

Dodatek A – Tanie linie lotnicze. W tym dodatku postaramy się opisać, jak działają tanie linie lotnicze, zwracając uwagę na różnice w stosunku do ich standardowych odpowiedników.

Na polskich lotniskach znaleźć można co najmniej siedmiu tanich przewoźników latających poza granice kraju. Są to linie: Centralwings, easyJet, Germanwings, Norwegian Air, Ryanair, Sky Europe, Wizz Air. Każda z linii ma swój regulamin, politykę cenową i systemy promocyjne. Istnieją jednak pewne cechy wspólne, które pozwalają zaliczyć je wszystkie do grupy tanich linii lotniczych, takie jak:

- ograniczenie usług na pokładzie samolotu: nie ma darmowych posiłków i alkoholu,
- brak podziału samolotu na klasy,
- wybieranie tańszych, mniejszych lotnisk, co pozwala na niższe koszty obsługi naziemnej, a zatem niższe opłaty lotniskowe,
- loty tylko po Europie i bez przesiadek,
- opłaty za przewóz są podawane zawsze za przelot w jedną stronę,
- wyraźne podnoszenie ceny biletów wraz ze zbliżaniem się terminu odlotu,
- widoczne kampanie reklamowe i promocje (wyraźne podkreślanie niskich cen biletów), przy czym liczba bardzo tanich biletów jest mocno ograniczona,
- podawanie cen biletów bez opłat dodatkowych: lotniskowych, za bagaż, ubezpieczenia itp.,
- system wypełniania samolotu (przybliżenie):
  - 30% miejsc najtańszych,
  - 30% miejsc ze średniej ceny (zakłada się, że już z tymi 60% pasażerów cena lotu powinna się zwracać),
  - 30% miejsc drogich,
  - 10% miejsc bardzo drogich, często droższych niż bilety tradycyjnych przewoźników na ten sam dzień.

Aby uzyskać taki algorytm, ceny są dokładnie monitorowane i dynamicznie dopasowywane w zależności od popytu. Także sama cena biletu jest właściwie funkcją liczby zajętych miejsc w samolocie, a to ostatnie jest funkcją czasu. Zatem, ponieważ nie wykorzystujemy dokładnej postaci zależności liczby wolnych miejsc od czasu, mogliśmy bez straty ogólności pisać, że zwykle cena biletu jest funkcją czasu (patrz uwaga 3.1.2).

Taka polityka prowadzi do sytuacji, kiedy rzeczywiście ceny w tanich liniach są niższe niż u standardowych przewoźników.

Ciekawym przykładem może być dokonane przez Rzeczpospolitą [15] porównanie cen zawarte w tabelach A.1.

Przewoźnik	**Skąd**	**Dokąd**	**Cena w zł**
Ryanair	Gdańsk	Standsted	95,99
Wizz Air	Katowice	Standsted	173,00
easy Jet	Gdańsk	Gatwick	180,00
Wizz Air	Gdańsk	Luton	206,00
easy Jet	Warszawa	Luton	273,00
easy Jet	Kraków	Luton/Gatwick	317,00
Ryanair	Wrocław	Standsted	317,43
Centralwings	Warszawa	Standsted	365,00
Ryanair	Kraków	Standsted	380,18
British Airways	Kraków	Gatwick	485,46
Wizz Air	Warszawa	Luton	590,00
LOT	Warszawa	Heathrow	**615,91**
British Airways	Warszawa	Heathrow	**627,48**

Tabela A.1. Porównanie cen biletów na loty do Londynu i z powrotem, wylot w dniu 23.11.2007, powrót w dniu 1.12.2007.

Jak już pisaliśmy, każdy z tanich przewoźników ma własny regulamin opisujący zasady funkcjonowania linii i (co dla naszego badania jest najważniejsze) możliwości zmian parametrów biletu. W tabeli A.2. przedstawiamy wyniki przeglądu regulaminów największych tanich przewoźników. Warto zwrócić uwagę, że zmiana nazwiska pasażera, która w rzeczywistości umożliwia wykonanie operacji odsprzedania biletu, jest możliwa we wszystkich liniach z wyjątkiem Germanwings.

	Anulowanie	**Zmiana rezerwacji**	**Zmiana pasażera**
Centralwings	Brak możliwości	25	25
easyJet	22,50	22,50	22,50
Germanwings	Brak możliwości	25	Brak możliwości
WizzAir	Brak możliwości	28	30
SkyEurope	Cena biletu	26,44	26,44
Ryanair	Brak	35	35

Tabela A.2. Zestawienie cen (w Euro) zmian parametrów biletu (na podstawie [16], [17], [18], [19], [20], [21]).

Dodatek B. W tym miejscu przedstawimy czytelnikowi jak na przykładowej trasie kształtują się relacje cen biletów tanich i zwykłych linii lotniczych.

Do przeprowadzenia porównania wybraliśmy jedną z najbardziej popularnych tras: Warszawa – Londyn. Ceny podane w tabeli B.1 są cenami netto(5) podanymi w złotówkach i dotycząc przelotu w jedną stronę. Pierwsi trzej przewoźnicy to tanie linie, ostatni (LOT) to zwykła linia lotnicza.

Przewoźnik	Czas do wylotu				
	4 mies.	**3 mies.**	**2 mies.**	**6 tyg.**	**4 tyg.**
Centralwings	179	269	299	299	349
Wizzair	49	89	129	189	189
easyJet	95	125	165	280	220
LOT	337	517	517	617	617
	3 tyg.	**2 tyg.**	**1 tydz.**	**jutro**	
Centralwings	349	549	449	549	
Wizzair	229	349	459	589	
easyJet	220	280	390	475	
LOT	617	900	857	1080	

Tabela B.1. Ceny biletów w PLN w zależności od czasu pozostałego do wylotu.

Jak widać, podane ceny odpowiadają schematowi przedstawionemu na wykresie 3.1. Co ciekawe dotyczy to również cen biletów LOTu, które są jednak wyraźnie wyższe niż ceny pozostałych linii.

(*wpłynęło 15 maja 2008 r.*)

(5) Bez podatków i dodatkowych opłat, np. lotniskowych.